Une version forte du théorème CHTAIBI-GARAMBOIS

April 30, 2012

1 Introduction

Le but de cet article est de trouver les limites à l'infini du rapport moyen des $\sigma(n)/n$ et σ'$(n)/n$ quand ces rapports sont pris sur les entiers divisibles par un nombre premier quelconque.

2 Notations et Définitions

Dans toute la suite :

q désignera un nombre premier ≥ 2 et n un entier naturel superieur à q.

$[x]$ désignera la partie entière du nombre rèel x.

On définit les fonctions somme des diviseurs et somme des diviseurs propres comme suit :

$$\sigma(n) = \sum_{d|k} d. \tag{1}$$

et

$$\sigma'(n) = \sigma(n) - n. \tag{2}$$

Et on considère les rapports moyens de ces deux fonctions pris sur les entiers divisibles par q :

$$K_q(n) = \frac{\sum_{k=1,q|k}^{n} \frac{\sigma(k)}{k}}{\sum_{k=1,q|k}^{n} 1}. \tag{3}$$

et

$$K'_q(n) = \frac{\sum_{k=1,q|k}^{n} \frac{\sigma'(k)}{k}}{\sum_{k=1,q|k}^{n} 1}. \tag{4}$$

3 Théorème

Pour tout nombre premier q on a :

$$\lim_{n\to\infty} K_q(n) = \frac{\pi^2}{6}\frac{q^2+q-1}{q^2} := K_q. \tag{5}$$

et :

$$\lim_{n\to\infty} K'_q(n) = \frac{\pi^2}{6}\frac{q^2+q-1}{q^2} - 1 := K'_q. \tag{6}$$

4 Preuve du théorème

On a pour tout entier naturel non nul k :

$$\frac{\sigma(k)}{k} = \frac{1}{k}\sum_{d|k} d = \frac{1}{k}\sum_{d|k}\frac{k}{d} = \sum_{d|k}\frac{1}{d}. \tag{7}$$

Et si on réécrit $K_q(n)$ en utilisant la dérnière formule on obtient :

$$K_q(n) = \frac{\sum_{k=1,q|k}^{n}\sum_{d|k}\frac{1}{d}}{\sum_{k=1,q|k}^{n} 1}. \tag{8}$$

D'où :

$$K_q(n) = \frac{\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}\sum_{k=1,d|k,q|k}^{n} 1}{\sum_{k=1,q|k}^{n} 1}. \tag{9}$$

Et puisque q est premier alors on a pour tout entier non nul d : soit $q|d$ soit q premier à d .

donc :

$$K_q(n) = \frac{\sum_{d=1,q|d}^{n} \frac{1}{d} \sum_{k=1,d|k}^{n} 1}{\sum_{k=1,q|k}^{n} 1} + \frac{\sum_{d=1,\mathrm{pgcd}(q,d)=1}^{n} \frac{1}{d} \sum_{k=1,qd|k}^{n} 1}{\sum_{k=1,q|k}^{n} 1}. \tag{10}$$

D'où :

$$K_q(n) = \frac{\sum_{d=1,q|d}^{n} \frac{1}{d}\left[\frac{n}{d}\right]}{\left[\frac{n}{q}\right]} + \frac{\sum_{d=1,\mathrm{pgcd}(q,d)=1}^{n} \frac{1}{d}\left[\frac{n}{qd}\right]}{\left[\frac{n}{q}\right]}. \tag{11}$$

Maintenant, on va analyser les deux termes de la somme (11) en utilisant l'inégalité suivante pout tout nombre réel x:

$$x - 1 \leq [x] \leq x. \tag{12}$$

On aura :

$$n\frac{\sum_{d=1,q|d}^{n} \frac{1}{d^2}}{\left[\frac{n}{q}\right]} - \frac{\sum_{d=1,q|d}^{n} \frac{1}{d}}{\left[\frac{n}{q}\right]} \leq \frac{\sum_{d=1,q|d}^{n} \frac{1}{d}\left[\frac{n}{d}\right]}{\left[\frac{n}{q}\right]} \leq n\frac{\sum_{d=1,q|d}^{n} \frac{1}{d^2}}{\left[\frac{n}{q}\right]}. \tag{13}$$

et :

$$\frac{n}{q}\frac{\sum_{d=1,\mathrm{pgcd}(q,d)=1}^{n} \frac{1}{d^2}}{\left[\frac{n}{q}\right]} - \frac{1}{q}\frac{\sum_{d=1,\mathrm{pgcd}(q,d)=1}^{n} \frac{1}{d}}{\left[\frac{n}{q}\right]} \leq \frac{\sum_{d=1,\mathrm{pgcd}(q,d)=1}^{n} \frac{1}{d}\left[\frac{n}{qd}\right]}{\left[\frac{n}{q}\right]} \leq \frac{n}{q}\frac{\sum_{d=1,\mathrm{pgcd}(q,d)=1}^{n} \frac{1}{d^2}}{\left[\frac{n}{q}\right]}. \tag{14}$$

et il est facile de voir que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{d=1,q|d}^{n} \frac{1}{d}}{\left[\frac{n}{q}\right]} = 0. \tag{15}$$

et :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q}\frac{\sum_{d=1,\mathrm{pgcd}(q,d)=1}^{n} \frac{1}{d}}{\left[\frac{n}{q}\right]} = 0. \tag{16}$$

et en se sevant de la valeur des deux limites suivantes :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{d=1,q|d}^{n}\frac{1}{d^2}=\frac{1}{q^2}\zeta(2)=\frac{1}{q^2}\frac{\pi^2}{6}. \tag{17}$$

et :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{d=1,\mathrm{pgcd}(q,d)=1}^{n}\frac{1}{d^2}=\zeta(2)-\frac{1}{q^2}\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}(1-\frac{1}{q^2}). \tag{18}$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{\sum_{d=1,q|d}^{n}\frac{1}{d^2}}{\left[\frac{n}{q}\right]}=\frac{1}{q}\frac{\pi^2}{6}. \tag{19}$$

et :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{q}\frac{\sum_{d=1,\mathrm{pgcd}(q,d)=1}^{n}\frac{1}{d^2}}{\left[\frac{n}{q}\right]}=\frac{\pi^2}{6}(1-\frac{1}{q^2}). \tag{20}$$

D'où en sommant toutes les limites qui interviennent dans les inégalités (13) et (14) on conclut que :

$$\lim_{n\to\infty}K_q(n)=\frac{1}{q}\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{6}(1-\frac{1}{q^2})=\frac{\pi^2}{6}\frac{q^2+q-1}{q^2}. \tag{21}$$

Et puisque on a :

$$K_q(n)=K'_q(n)+1. \tag{22}$$

alors :

$$\lim_{n\to\infty}K'_q(n)=\lim_{n\to\infty}K'_q(n)-1=\frac{\pi^2}{6}\frac{q^2+q-1}{q^2}-1. \tag{23}$$

CQFD.