On se propose de trouver une majoration assymptotique pour le nombre d'entiers m inférieures à n tels que $3 \mid m$ et $3 \nmid \sigma(m) - m$. On sait qu'ils sont caractérisés par le fait que tous leurs facteurs premiers de $3\mathbb{N}+2$ apparaissent avec des exponsant pairs. On note $\log x$ le logarithme naturel et on écrit $x \equiv a[m]$ pour "x est congruent à a modulo m". Pour tout x, on pose $\Pi(x) = \{p \text{ premier}, p \leq x\}$ et on note $\pi(x) = \#\Pi(x)$. Ensuite on pose $\Theta(x) = \{p \in \Pi(x) \mid p \equiv a[q]\}$ et on note $\theta(x) = \#\Theta(x)$. Voici une preuve pour la célèbre formule de Mertens.

Théorème 1 *Soit q un nombre premier impair et $a \in [1, q-1]$ un entier. Alors on a:*

$$\Sigma_{p \text{ premier},\ p\equiv a[q],\ p\leq y}\frac{1}{p} \sim \frac{1}{q-1}\log\log y.$$

preuve:

D'après le théorème des nombres premiers on a:

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} \to 1.$$

D'après le théorème de Tchebotarev appliqué au q-ième polynôme cyclotomique on a:

$$\frac{\theta(x)}{\pi(x)} \to \frac{1}{q-1}.$$

En combinant les deux dernières formules, on a:

$$\theta(x) \sim \frac{1}{q-1}\frac{x}{\log x}.$$

Cela donne ensuite:

$$\theta(t)(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}) \sim \frac{1}{q-1}\frac{1}{t\log t}.$$

Par une comparaison série-intégrale, on peut montrer:

$$\Sigma_{t=2}^{y}\frac{1}{t\log t} \sim \log\log y.$$

Par le théorème de comparaisons des séries à termes positifs et équivalents, en utilisant les deux dernières équations, on a:

$$\Sigma_{t=2}^{y}\theta(t)(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}) \sim \frac{1}{q-1}\log\log y. \tag{1}$$

Faisons le lient avec la série $\Sigma\frac{1}{p}$. On remarque que les valeurs de t telles qu'on ait $\theta(t) - \theta(t-1) = 1$ sont exactement les nombres premiers t avec $t \equiv a[q]$. Ainsi, on peut écrire pour tout $y > 1$:

$$\Sigma_{p \text{ premier},\ p\equiv a[q],\ p\leq y}\frac{1}{p} = \Sigma_{t=2}^{y}\frac{\theta(t)-\theta(t-1)}{t}.$$

Comme la somme du membre de droite de l'équation ci-dessus est finie, on peut changer l'ordre de sommation et on obtient:

$$\Sigma_{p \text{ premier}, \ p\equiv a[q], \ p\leq y}\frac{1}{p} = \frac{\theta(y)}{y} - \frac{\theta(1)}{1} + \Sigma_{2\leq t\leq y-1}\theta(x)(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}). \tag{2}$$

Comme $|\frac{\theta(y)}{y}|$ est borné par 1, et $\Sigma_{2\leq t\leq y-1}\theta(x)(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t})$ va à l'infini, on a:

$$\frac{\theta(y)}{y} - \frac{\theta(1)}{1} + \Sigma_{2\leq t\leq y-1}\theta(x)(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}) \sim \Sigma_{2\leq t\leq y-1}\theta(x)(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}). \tag{3}$$

De (1),(2) et (3) on a:

$$\Sigma_{p \text{ premier}, \ p\equiv a[q], \ p\leq y}\frac{1}{p} \sim \frac{1}{q-1}\log\log y.$$

□

Avant de passer au théorème principal, on fait quelques notations supplémentaires.

Notation 1 *Pour tout $x > 1$, on pose:*

$$S(x) = \{m \leq x \mid \forall p \equiv a[q] \text{ premier}, \ val_p m \equiv 0[2]\}.$$

Pour tous $n, y \in \mathbb{N}$ on pose:

$$S(n, y) = \{m \leq n \mid \forall p \in \Theta(y), \ val_p m \equiv 0[2]\}.$$

Pour tout $y \in \mathbb{N}$, on note:

$$T(y) = \{m \in \mathbb{N} \mid \forall p \text{ premier }, p \mid m \Rightarrow p \in \Theta(y)\}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{N}$, on note $\#t$ le nombre de diviseurs de t en comptant les multiplicités.

On note $[\log n]^*$ le plus petit nombre impair supérieur à $\log n$.

Finalement, on définit la fonction $\epsilon : \mathbb{N} \to \{1, -1\}$ en prenant $\epsilon(p^k) = (-1)^k$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et p premier et en posant $\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b)$ pour tous a et b premiers entre eux.

Théorème 2 *Soient q un nombre premier et a un entier de $[1, q-1]$. Alors on a:*

$$\#S(n) \leq \frac{n}{(\log\log n)^{\frac{1}{q-1}+o(1)}}$$

preuve: Par souci de clarté, on coupe la preuve en cinq étapes.

Étape 1.
$$\Pi_{p\in\theta(y)}\frac{1}{1+\frac{1}{p}} = (\log y)^{\frac{-1}{q-1}+o(1)}.$$

Étape 2. Pour tous $n, y \in \mathbb{N}$, on a:
$$\Sigma_{k=0}^{[\log n]^*}(-1)^k(\Sigma_{t\in T(y),\#t=k}\frac{1}{t}) \leq \Pi_{p\in\theta(y)}\frac{1}{1+\frac{1}{p}}.$$

Étape 3. Pour tous $n, y \in \mathbb{N}$ on a $S(n) \leq S(n,y)$ et:
$$\#S(n,y) = \Sigma_{t\in\Theta(y),\#t\leq[\log n]^*}\epsilon(t)[\frac{n}{t}].$$

Étape 4. Pour tous $n, y \in \mathbb{N}$, l'inégalité suivante est vraie.
$$\#\{t \in T(y), \#t \leq [\log n]^*\} \leq (\log n + 3)^{\frac{y}{\log y}}$$

Étape 5. Conclusion.

Prenons maintenant les étapes une par une.
étape 1 D'après le théorème 1, on a $\Sigma_{p\in\Theta(y)}\frac{1}{p} \sim \frac{1}{q-1}\log\log y$. Comme $\log(1+\frac{1}{p}) \sim \frac{1}{p} > 0$ quand p va à l'infini, on a:
$$\log(\Pi_{p\in\theta(y)}\frac{1}{1+\frac{1}{p}}) \sim \frac{-1}{q-1}\log\log y$$
quand y vas à l'infini. En prenant l'exponentielle de chacune des fonctions en y ci-dessus, on trouve le résultat.
étape 2 D'après le théorème de Fubini, le cas positif, on a:
$$\Sigma_{k=0}^{\infty}(\Sigma_{t\in T(y),\#t=k}\frac{1}{t}) = \Pi_{p\in\Theta(y)}(\Sigma_{k_p=0}^{\infty}\frac{1}{p^{k_p}}) = \Pi_{p\in\Theta(y)}\frac{1}{1-\frac{1}{p}},$$
qui est borné car $\Theta(y)$ est un ensemble fini. Ainsi, $\Sigma_k(-1)^k(\Sigma_{t\in T(y),\#t=k}\frac{1}{t})$ converge absolument, donc converge. Comme il s'agit d'une série alternée et $[\log n]^*$ est impair, on a:
$$\Sigma_{k=0}^{[\log n]^*}(-1)^k(\Sigma_{t\in T(y),\#t=k}\frac{1}{t}) \leq \Sigma_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\Sigma_{t\in T(y),\#t=k}\frac{1}{t}). \tag{4}$$
Comme la série de droite converge absolument, on peut permuter ses termes et on trouve:
$$\Sigma_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\Sigma_{t\in T(y),\#t=k}\frac{1}{t}) = \Pi_{p\in\Theta(y)}(\Sigma_{k_p=0}^{\infty}(-1)^{k_p}\frac{1}{p^{k_p}}) = \Pi_{p\in\theta(y)}\frac{1}{1+\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

étape 3 D'après la définition, on a $S(n) \subset S(n,y)$, donc $\#S(n) \leq \#S(n,y)$.

On note p_i le i-ième élément de $\Theta(y)$. Pour $i \leq \theta(y)$, on pose $E_i = \{t \leq n \mid val_{p_i}(m) \equiv 1[2]\}$. Trivialement, pour tout $i \in [1, \theta(y)]$ on a: $E_i = E_i^{(1)} - E_i^{(2)} + \ldots - E_i^{([\log n]^*)}$ avec $E_i^{(s)} = \{m \leq n \mid p_i^s \mid m\}$.

On peut montrer facilement la formule suivante pour la complémentaire de $S(n,y)$ dans $[1,n]$.

$$S(n,y)^c = \bigcup_{i=1}^{\theta(y)} (\bigcup_{s_i=1}^{\frac{[\log n]^*+1}{2}} (E_i^{(2s_i-1)} \backslash E_i^{(2s_i)})). \tag{6}$$

On rappelle le principe d'inclusion-exclusion. Pour tous $A_1, \ldots, A_N$ on a:

$$|\bigcup_{i=1}^{N} A_i| = \Sigma_{l=1}^{N} \Sigma_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq N} (-1)^{l-1} |A_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap A_{i_l}|$$

où $|A|$ désigne le cardinal de A. On l'applique pour $N = \theta(y) \cdot \frac{[\log n]^*+1}{2}$ et les ensembles $(E_i^{(2s_i-1)} \backslash E_i^{(2s_i)})$ avec $1 \leq i \leq \theta(y)$ et $1 \leq s_i \leq [\frac{[\log n]^*}{2}]$. Comme, pour tout i et pour $s \neq s'$, on a $(E_i^{(2s-1)} \backslash E_i^{(2s)}) \bigcap (E_i^{(2s'-1)} \backslash E_i^{(2s')}) = \emptyset$, on a:

$$(-1)|S(n,y)^c| = \Sigma_{l=1}^{\theta(y)} \Sigma_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq \theta(y)} \Sigma_{1 \leq s_1, \ldots, s_l \leq \frac{[\log n]^*+1}{2}} (-1)^l |\bigcap_{k=1}^{l} (E_{i_k}^{(2s_k-1)} \backslash E_{i_k}^{(2s_k)})|. \tag{7}$$

Un calcul simple montre que pour tout N et tous $A_1^{(0)}, \ldots, A_N^{(0)}$, $A_1^{(1)}, \ldots, A_N^{(1)}$ ensembles tels que $A_i^{(0)} \supset A_i^{(1)}$, on a:

$$|\Pi_{k=1}^{N} (A_k^{(0)} \backslash A_k^{(1)})| = \Sigma_{0 \leq a_1, \ldots, a_N \leq 1} (-1)^{a_1 + \ldots + a_N} |\bigcap_{k=1}^{N} A_k^{(a_k)}|. \tag{8}$$

On fixe l, $i_1, \ldots, i_l$ et $s_1, \ldots, s_l$. On applique la formule ci-dessus pour $N = l$, pour tous $k \leq l$ et $a \in \{0,1\}$, $A_k^a = E_{i_k}^{2s_i-1+a}$. On remarque que $(-1)^{a_1+\ldots+a_l} = (-1)^l \cdot (-1)^{(2s_1-1+a_1)+\ldots+(2s_l-1+a_l)}$. Ainsi on a:

$$(-1)^l |\bigcap_{k=1}^{l} (E_{i_k}^{(2s_k-1)} \backslash E_{i_k}^{(2s_k)})| = \Sigma_{0 \leq a_1, \ldots, a_l} (-1)^{\Sigma_{k=1}^{l} (2s_k-1+a_k)} |\bigcap_{k=1}^{l} (E_{i_k}^{(2s_k-1)} \backslash E_{i_k}^{(2s_k)})|. \tag{9}$$

Quand on injecte (9) dans (7), on trouve:

$$(-1)|S(n,y)^c| = \Sigma_{l=1}^{\theta(y)} \Sigma_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq \theta(y)} \Sigma_{1 \leq s_1, \ldots, s_l \leq \frac{[\log n]^*+1}{2}} \Sigma_{0 \leq a_1, \ldots, a_l} \tag{10}$$

$$(-1)^{(2s_1-1+a_1)+\ldots+(2s_l-1+a_l)}|\bigcap_{k=1}^{l} E_{i_k}^{(2s_k-1+a_k)}|.$$

Cela se transforme en combinant la somme sur les s_i et les a_i par $u_i = 2s_i - 1 + a_i$:

$$(-1)|S(n,y)^c| = \Sigma_{l=1}^{\theta(y)} \Sigma_{1\leq i_1<\ldots<i_l\leq\theta(y)} \Sigma_{1\leq u_1,\ldots,u_l\leq[\log n]^*+1} (-1)^{u_1+\ldots+u_l} |\bigcap_{k=1}^{l} E_{i_k}^{u_k}|. \tag{11}$$

Pour tout $t = p_{i_1}^{u_1}\ldots p_{i_l}^{u_l}$ avec $l\leq\theta(y)$, $1\leq i_1<\ldots<i_l\leq[\log n]^*$ et $1\leq u_1,\ldots,u_l$, on a: $\bigcap_{k=1}^{l} E_{i_k}^{u_k} = \{m\leq n|\ t\mid n\}$. De plus $(-1)^{u_1+\ldots+u_l} = \epsilon(t)$. Cela implique l'égalité suivante:

$$(-1)^{u_1+\ldots+u_l}|\bigcap_{k=1}^{l} E_{i_k}^{u_k}| = \epsilon(t)[\frac{n}{t}]. \tag{12}$$

Réciproquement, tout $t\in T(y)$ tel que $\#t\leq[\log n]^*$ s'écrit comme $t = p_{i_1}^{u_1}\ldots p_{i_l}^{u_l}$ avec $l\leq\theta(y)$, $1\leq i_1<\ldots<i_l\leq[\log n]$ et $1\leq u_1,\ldots,u_l\leq[\log n]^*$. Ainsi, (11) devient:

$$(-1)|S(n,y)^c| = \Sigma_{t\in T(y),1\leq\#t\leq[\log n]^*}\epsilon(t)[\frac{n}{t}]. \tag{13}$$

Finalement, on a $\#S(n,y) = n - |S(n,y)^c| = n + \Sigma_{l=1}^{[\log n]^*}\Sigma_{t\in T(y),\#t=l}[\frac{n}{t}]$. On fait rentrer n dans la somme car, pour $t=1$, on a $t\in T(y)$ et $\#t=0$. Ainsi on trouve le résultat.

étape 4 Tout élément x de $\{t\in T(y),\#t\leq[\log n]^*\}$ est déterminé par $val_p(x)_{p\in\Theta(y)}$. Comme $\#x\leq[\log n]^*$, pour chaque p on a au plus $[\log n]^*+1$ possibilités pour $val_p(x)$. Comme $[\log n]^*\leq\log n+2$ et, pour x suffisamment grand, on a $\theta(x)<\frac{x}{\log x}$, on obtient:

$$\#\{t\in T(y),\#t\leq[\log n]^*\}\leq(\log n+3)^{\#\Theta(y)}\leq(\log n+3)^{\frac{y}{\log y}}$$

étape 5 Pour tout n, on pose $y(n) = [\frac{\log n}{\log\log n}]$. D'après l'étape 3, on a:

$$\#S(n)\leq\#S(n,y) = \Sigma_{t\in\Theta(y),\#t\leq[\log n]^*}\epsilon(t)[\frac{n}{t}]. \tag{14}$$

Comme, pour tout réel x, on a $|[x]-x|<1$, on obtient:

$$\Sigma_{k=0}^{[\log n]^*}(-1)^k(\Sigma_{t\in T(y),\#t=k}[\frac{n}{t}])\leq$$

$$n\Sigma_{k=0}^{[\log n]^*}(-1)^k(\Sigma_{t\in T(y),\#t=k}\frac{1}{t}) + \#\{t\in T(y),\#t\leq[\log n]^*\}. \tag{15}$$

D'après l'étape 2 on sait:

$$\Sigma_{k=0}^{[\log n]^*}(-1)^k(\Sigma_{t\in T(y),\#t=k}\frac{1}{t})\leq\Pi_{p\in\theta(y)}\frac{1}{1+\frac{1}{p}}. \tag{16}$$

D'après l'étape 4 on a:

$$\#\{t \in T(y), \#t \leq [\log n]^*\} \leq (\log n + 3)^{\frac{y}{\log y}} \tag{17}$$

De (14),(15), (16) et (17), on trouve:

$$\#S(n) \leq n\Pi_{p\in\Theta(y)}\frac{1}{1+\frac{1}{p}} + (\log n + 3)^{\frac{y}{\log y}}. \tag{18}$$

On a $(\log n+3)^{\frac{y}{\log y}} = \exp((\log\log n + o(\log\log n))\cdot\frac{y}{\log y}) = \exp((1+o(1))\frac{\log n}{\log\log n}) = = n^{\frac{1+o(1)}{\log\log n}} = o(\frac{n}{(\log\log n)^{\frac{2}{q-1}}})$. D'après l'étape 1, on sait: $\Pi_{p\in\theta(y)}\frac{1}{1+\frac{1}{p}} = (\log y)^{\frac{-1}{q-1}+o(1)}$ quand n et (par conséquent) y vont à l'infini. Donc $n\Pi_{p\in\Theta(y)}\frac{1}{1+\frac{1}{p}} = \frac{n}{(\log\log n)^{\frac{1}{q-1}+o(1)}}$.

Ainsi, l'équation (18) devient:

$$\#S(n) \leq \frac{n}{(\log\log n)^{\frac{1}{q-1}+o(1)}}.$$

□

Corollaire 1 *On note* $L_3(n) = \{m \leq n \mid\ 3 \mid m$ *et* $3 \nmid \sigma(m) - m\}$. *Alors on a:*

$$\frac{\#L_3(n)}{n} \leq (\frac{1}{\log\log n})^{\frac{1}{2}+o(1)}. \tag{19}$$

preuve: On rappelle que les éléments de $L_3(n)$ ont tous leurs facteurs premiers de $3\mathbb{Z}+2$ avec exposant pair. Ainsi $L_3(n) \subset S(n)$ si on garde les notations précédentes avec $q = 3$ et $a = 2$. D'après le théorème 2 on a $\#S(n) \leq \frac{n}{(\log\log n)^{\frac{1}{2}+o(1)}}$. Ainsi $\frac{\#L_3(n)}{n} \leq \frac{\#S(n)}{n} \leq (\frac{1}{\log\log n})^{\frac{1}{2}+o(1)}$.□