Autour de la conservation d'un facteur premier à une puissance donnée dans les termes d'une suite aliquote

09/06/2012

http://www.aliquotes.com

1 Introduction

Le but de cet article est d'exposer la preuve d'un résultat concernant la conservation d'un facteur premier à une puissance donnée dans les termes d'une suite aliquote, et cela est le fruit de plusieurs échanges et analyses numériques faites conjointement avec Monsieur Jean-Luc Garambois sur la conservation du facteur 2 à la puissance 1.

2 Notations et Définitions

Dans toute la suite :

On fixe q un nombre premier ≥ 2 et α un entier naturel ≥ 1.

p et p_1,p_2,...p_k désigneront des nombres premiers ≥ 2.

On définit les fonctions somme des diviseurs et somme des diviseurs propres comme suit :

$$\sigma(n) = \sum_{d|k} d. \tag{1}$$

Et

$$\sigma'(n) = \sigma(n) - n. \tag{2}$$

$v_p(n)$ désignera dans toute la suite la puissance du facteur premier p dans la décomposition en facteurs premiers de n.

3 Théorème

Soit k un entier naturel tel que :

$$k \geq \alpha + 1. \tag{3}$$

Et soit n un entier naturel divisible par q tel que $v_q(n) = \alpha$.

Si n a k facteurs premiers $(p_1,p_2,...p_k)$ distincts et différents de q tel que pour tout $1 \leq i \leq k$:

$p_i \equiv -1[q]$ et $v_{p_i}(n)$ est impair alors :

$$v_q(\sigma'(n)) = \alpha. \tag{4}$$

4 Preuve du théorème

On commence par écrire n sous la forme suivante :

$$n = Aq^\alpha \prod_{1 \leq i \leq k} p_i^{2\alpha_i+1}. \tag{5}$$

Avec A un entier naturel premier avec q et tous les p_i, et les α_i sont des entiers naturels .

Il est clair que :

$$\sigma(n) = \sigma(A)\sigma(q^\alpha) \prod_{1 \leq i \leq k} \sigma(p_i^{2\alpha_i+1}). \tag{6}$$

Et on sait que :

$$\sigma(p_i^{2\alpha_i+1}) = \sum_{0 \leq j \leq 2\alpha_i+1} p_i^j. \tag{7}$$

Donc:

$$\sigma(p_i^{2\alpha_i+1}) = (1 + p_i) \sum_{0 \leq j \leq \alpha_i} p_i^{2j}. \tag{8}$$

Et puisque $p_i \equiv -1[q]$ on aura pour tout $1 \leq i \leq k$: $q|\sigma(p_i^{2\alpha_i+1})$, et on en déduit que $q^k|\sigma(n)$.

Et puisque $q^\alpha|n$ et $k \geq \alpha+1$ alors : $q^\alpha|\sigma'(n)$.

Maintenant supposons que $q^{\alpha+1}|\sigma'(n)$:

Puisque $q^{\alpha+1}|\sigma(n)$ et $\sigma'(n) = \sigma(n) - n$ alors : $q^{\alpha+1}|n$ ce qui est impossible car :

$$v_q(n) = \alpha. \tag{9}$$

Donc $q^{\alpha+1} \nmid \sigma'(n)$. CQFD